

Ю. В. Ігнатова, асистент кафедри
економіко-математичного моделювання
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана

МУЛЬТИПОТОКОВА ОДНОФАЗОВА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗЕРНОПЕРЕРОБНИМ ПІДПРИЄМСТВОМ

АНОТАЦІЯ. У статті запропоновано модель управління зернопереробним підприємством з використанням апарату систем масового обслуговування. На основі математичної моделі роботи зернопереробного підприємства в динаміці отримано прогноз функціонування підприємства на фазі прийому зернових культур і його основні операційні характеристики. До-

similar papers at core.ac.uk

provided by Institutional Repository of Vadym Hetman

КЛЮЧОВІ СЛОВА: зернопереробне підприємство, система масового обслуговування, вхідний потік вимог, розв'язки в динаміці, стаціонарний режим.

АННОТАЦИЯ. В статье предложена модель управления зерноперерабатывающим предприятием с использованием аппарата систем массового обслуживания. На основе математической модели работы зерноперерабатывающего предприятия в динамике получено прогноз функционирования предприятия на фазе приема зерновых культур и его основные операционные характеристики. Доказано, что получение вероятностного прогноза деятельности предприятия в стационарном режиме не зависит от начального состояния.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: зерноперерабатывающее предприятие, системы массового обслуживания, входящий поток требований, решения в динамике, стационарный режим.

ABSTRACT. *The article suggested model of grain processing enterprises with the use of queuing systems. Based on the mathematical model of grain-processing enterprises in dynamic prediction function obtained on admission phase grains and its main operational characteristics. It is proved that obtaining probabilistic forecast of the enterprise in steady state is independent of its initial state.*

KEYWORDS: *grain processing enterprise queuing system, the input flow requirements, solutions in the dynamics, steady mode.*

Вступ. Сучасне зернопереробне підприємство являє собою комплекс високоомеханізованих технологічних ліній, на якому всі операції, пов'язані з прийманням, покращенням якості зерна, його зберіганням і відпуском, повністю автоматизовані. У технологічному процесі на елеваторі всі машини і механізми об'єднані, в так звані, маршрути. Вони створюються з груп машин, механізмів і приладів, які забезпечують переміщення зерна з одного силосу в інший, а також аспіраційного обладнання, яке використовується для знепилювання транспортних машин і силосів. У свою чергу, максимальне використання виробничої потужності технологічних ліній і оперативної можливості елеватора багато в чому залежить від часу, який витрачається на перебудову маршруту, стійку роботу машин і автоматичне виключення їх при аварії або неправильному налаштуванні маршруту.

Процес приймання зерна — частина великого комплексу транспортних і технологічних процесів, які об'єднують у післязбиральну обробку зерна на елеваторах і хлібоприймальних підприємствах. За [5, с. 172] умови проведення заготівель в Україні характеризуються багатьма особливостями: великими об'ємами надходження зерна (до 10 000 т/добу на одне велике хлібоприймальне підприємство), різноманітністю засобів доставки (одиначні, багатовантажні автомобілі, потяги та інші засоби доставки), а також зжатыми строками періоду заготівель (15—30 діб). Крім того, необхідно відмітити, що одночасно на підприємство надходить велика кількість культур різної якості. Все це ускладнює прийом зерна, так як необхідно окремо розміщувати зерно різної якості. На прийом зерна впливають погодні умови під час збирання врожаю, ступінь технічної оснащеності сільського господарства та багато іншого.

Вивчення комплексу виробничих процесів післязбиральної обробки зерна передбачає системний підхід. «Хлібоприймальне підприємство розглядають як систему, що складається з елементів, кожний з яких складає математичний опис окремого процесу (приймання, відпуску, очищення, сушіння та ін.)» [5, с. 172].

Постановка проблеми. Метою даної роботи є розробка математичної моделі, яка імітує процес функціонування зернопереро-

бного підприємства задля одержання операційних характеристик підприємства. Причому, при побудові адекватної моделі управління зернопереробним підприємством необхідно максимально враховувати технологічні особливості функціонування підприємств зернопереробної підгалузі, а саме переміщення зерна відповідними виробничими маршрутами, які забезпечать завчасну оцінку та подальше корегування діяльності зернопереробного підприємства на кожній виробничій фазі.

Для докладного опису діяльності зернопереробного підприємства, оцінки впливу різних параметрів на його характеристики функціонування, виявлення переваг і недоліків запропонованих змін і прогнозування подальшої ефективної діяльності, доцільно використовувати «один з найбільш потужних і найбільш ефективних методів дослідження процесів і систем різної природи та степеня складності — метод імітаційного моделювання» [4, с. 7]. Методи та моделі управління зернопереробним підприємством, які використовуються на сьогоднішній день і представлені, наприклад у роботі [5], є досить жорсткими та привертають увагу до вивчення проблеми гнучкості в управлінні зернопереробним підприємством. Модель, яка описує діяльність зернопереробного підприємства має легко адаптуватись до виробничого процесу конкретного підприємства, перебудовуватись залежно від фази обслуговування (приймання, відпуску, очищення, сушіння та ін.).

Найкращою ілюстрацією області використання імітаційного моделювання, за оцінкою [3], є системи та мережі масового обслуговування (СМО та ММО), в термінах яких на сьогоднішній день описується багато реальних систем: обчислювальні системи, вузли мереж зв'язку, магазини, виробничі процеси — будь-які системи, де можливі черги та відмови в обслуговуванні. На відміну від існуючих методів управління зернопереробним підприємством, СМО є дуже гнучкими та легко адаптуються під будь-яку фазу обслуговування: «СМО та ММО відрізняються високою наочністю відображення об'єктів, що моделюються і внаслідок цього порівняною простотою переходу від реальних об'єктів до математичного моделювання» [2, с. 7].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питаннями управління сільськогосподарськими підприємствами в галузі зберігання та переробки зерна і близьких галузей були присвячені праці вчених С. П. Пункова, А. І. Стародубцевої, І. П. Богомолової та ін. Ці автори приділяють увагу лише економічній складовій діяльності зернопереробного підприємства, а не сукупності технологічної та економічної складових.

Неупереджений і критичний погляд на праці останнього часу, наприклад, [1] та літературних джерел у ньому, зроблено висновок, що управління виробництвом за сукупністю технологічних та економічних показників для зернопереробної підгалузі є переважнішим за управління виробництвом на основі лише економічних показників.

Виклад основних результатів дослідження. Робота елеватора вдало описується моделями теорії масового обслуговування (ТМО). Так, наприклад, будь-яке зернопереробне підприємство можна представити у вигляді системи масового обслуговування. Представимо елеватор, як однофазову систему масового обслуговування, до якої надходить два різнопріоритетних пуассонівських потоки вимог на обробку зернових культур (прийом зернових) із параметром λ_1 т/год. та λ_2 т/год., і при цьому інтенсивність обслуговування кожної вимоги є величиною, яка має експоненціальний закон розподілу ймовірностей із параметрами μ_1 та μ_2 . Отже, інтенсивність прийому зернових культур першого потоку дорівнює μ_1 т/год., а другого μ_2 т/год. Докладніше роботу елеватора представлено на рис.1.

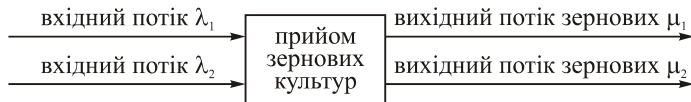


Рис. 1. Узагальнена схема прийому зернових культур на елеваторі

Схема представлена на рис.1 має один канал обслуговування і при цьому кількість вимог в черзі обмежується розміром каналу обслуговування. Приймемо, що число вимог першого потоку в черзі повинно не перевищувати числа $m_1 = 3$, а другого $n_1 = 3$. Тоді імовірнісна модель такої системи належить до класу $M/M/1/m_1/n_1$.

У цій системі введена така дисципліна обслуговування: вимоги першого потоку користуються відносним пріоритетом в обслуговуванні відносно вимог другого потоку, який називають простим. Тобто, коли в системі перебувають вимоги обох потоків і канал обслуговує вимогу простого потоку, то після завершення його обслуговування перевага надається вимогам першого потоку, пріоритетного, і канал обслуговує вимоги цього потоку до повної ліквідації їх у системі, і тільки потім починає обслуговувати вимоги простого потоку при його наявності в черзі. Коли в системі відсутні вимоги обох потоків, то канал настраюється на обслуговування вимог простого потоку.

Стохастична модель роботи елеватора в динаміці представлена системою однорідних лінійних диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 P'_{0,0}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{0,0}(t) + \mu_1 Q_{0,1}(t) + \mu_2 P_{1,0}(t) \\
 P'_{1,0}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,0}(t) + \mu_1 Q_{1,1}(t) + \mu_2 P_{2,0}(t) + \lambda_2 P_{0,0}(t) \\
 P'_{2,0}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,0}(t) + \mu_1 Q_{2,1}(t) + \mu_2 P_{3,0}(t) + \lambda_2 P_{1,0}(t) \\
 P'_{3,0}(t) = -(\lambda_1 + \mu_2)P_{3,0}(t) + \mu_1 Q_{3,1}(t) + \lambda_2 P_{2,0}(t) \\
 P'_{1,1}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,1}(t) + \lambda_1 P_{1,0}(t) \\
 P'_{1,2}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,2}(t) + \lambda_1 P_{1,1}(t) \\
 P'_{1,3}(t) = -(\lambda_2 + \mu_2)P_{1,3}(t) + \lambda_1 P_{1,2}(t) \\
 P'_{2,1}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,1}(t) + \lambda_2 P_{1,1}(t) + \lambda_1 P_{2,0}(t) \\
 P'_{2,2}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,2}(t) + \lambda_2 P_{1,2}(t) + \lambda_1 P_{2,1}(t) \\
 P'_{2,3}(t) = -(\lambda_2 + \mu_2)P_{2,3}(t) + \lambda_2 P_{1,3}(t) + \lambda_1 P_{2,2}(t) \\
 P'_{3,1}(t) = -(\lambda_1 + \mu_2)P_{3,1}(t) + \lambda_2 P_{2,1}(t) + \lambda_1 P_{3,0}(t) \\
 P'_{3,2}(t) = -(\lambda_1 + \mu_2)P_{3,2}(t) + \lambda_2 P_{2,2}(t) + \lambda_1 P_{3,1}(t) \\
 P'_{3,3}(t) = -\mu_2 P_{3,3}(t) + \lambda_2 P_{2,3}(t) + \lambda_1 P_{3,2}(t) \\
 Q'_{0,1}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{0,1}(t) + \mu_1 Q_{0,2}(t) + \mu_2 P_{1,1}(t) + \lambda_1 P_{0,0}(t) \\
 Q'_{0,2}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{0,2}(t) + \mu_1 Q_{0,3}(t) + \mu_2 P_{1,2}(t) + \lambda_1 Q_{0,1}(t) \\
 Q'_{0,3}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1)Q_{0,3}(t) + \mu_2 P_{1,3}(t) + \lambda_1 Q_{0,2}(t) \\
 Q'_{1,1}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{1,1}(t) + \mu_1 Q_{1,2}(t) + \mu_2 P_{2,1}(t) + \lambda_2 Q_{0,1}(t) \\
 Q'_{1,2}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{1,2}(t) + \mu_1 Q_{1,3}(t) + \mu_2 P_{2,2}(t) + \lambda_2 Q_{0,2}(t) + \lambda_1 Q_{1,1}(t) \\
 Q'_{1,3}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1)Q_{1,3}(t) + \mu_2 P_{2,3}(t) + \lambda_2 Q_{0,3}(t) + \lambda_1 Q_{1,2}(t) \\
 Q'_{2,1}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{2,1}(t) + \mu_1 Q_{2,2}(t) + \mu_2 P_{3,1}(t) + \lambda_2 Q_{1,1}(t) \\
 Q'_{2,2}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{2,2}(t) + \mu_1 Q_{2,3}(t) + \mu_2 P_{3,2}(t) + \lambda_2 Q_{1,2}(t) + \lambda_1 Q_{2,1}(t) \\
 Q'_{2,3}(t) = -(\lambda_2 + \mu_1)Q_{2,3}(t) + \mu_2 P_{3,3}(t) + \lambda_2 Q_{1,3}(t) + \lambda_1 Q_{2,2}(t) \\
 Q'_{3,1}(t) = -(\lambda_1 + \mu_1)Q_{3,1}(t) + \mu_1 Q_{3,1}(t) + \lambda_2 Q_{2,1}(t) \\
 Q'_{3,2}(t) = -(\lambda_1 + \mu_1)Q_{3,2}(t) + \mu_1 Q_{3,3}(t) + \lambda_1 Q_{3,1}(t) + \lambda_2 Q_{2,2}(t) \\
 Q'_{3,3}(t) = -\mu_1 Q_{3,3}(t) + \lambda_1 Q_{3,2}(t) + \lambda_2 Q_{2,3}(t),
 \end{array} \right. \quad (1)$$

де $P_{n,m}$ — імовірність того, що в момент часу t к системі перебуває m — вимог першого потоку та n — вимог другого потоку, при цьому система обслуговує вимоги другого потоку ($n = \overline{1,3}; m = \overline{0,3}$);

$Q_{n,m}$ — імовірність того, що в момент часу t к системі перебуває m — вимог першого потоку та n — вимог другого потоку, при цьому система обслуговує вимоги першого потоку ($n = \overline{0,3}; m = \overline{1,3}$).

Переставимо систему (1) в векторно-матричній формі

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = A \cdot \vec{P}(t),$$

де $\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{0,0}(t) \\ P_{1,0}(t) \\ P_{2,0}(t) \\ \vdots \\ Q_{3,1}(t) \\ Q_{3,2}(t) \\ Q_{3,3}(t) \end{pmatrix}$ — вектор ймовірностей станів підприємства в момент часу t ;

A — квадратна матриця вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) & \mu_2 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Якщо, $\vec{P}(t) = T \cdot \vec{y}(t)$, то

$$T \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = AT\vec{y}(t) \rightarrow \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = T^{-1}AT\vec{y}(t) = D\vec{y}(t). \quad (2)$$

Отже, матриця A приведено до діагонального вигляду, в якій елементи головної діагоналі є характеристичні корені β_n системи (1), а решта дорівнюють 0.

Розв'язуючи рівняння (2), одержимо:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = (y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)) \begin{pmatrix} e^{\beta_1 t} \\ e^{\beta_2 t} \\ \vdots \\ e^{\beta_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0)e^{\beta_1 t} \\ y_2(0)e^{\beta_2 t} \\ \vdots \\ y_n(0)e^{\beta_n t} \end{pmatrix},$$

де компоненту $y_n(0)$ знаходимо як $\bar{y}(0) = T^{-1} \bar{P}(0)$.

Визначивши вектор $\bar{y}(t)$, одержимо розв'язки системи (1):

$$\bar{P}(t) = T \cdot \bar{y}(t). \quad (3)$$

Встановимо такі початкові умови: нехай інтенсивність надходження зернових першого потоку складає 1 т/год., а другого 2 т/год. Інтенсивність обслуговування і першої, і другої вимоги складає 5 т/год. Тоді, $\lambda_1 = \frac{1}{60}, \lambda_2 = \frac{2}{60}, \mu_1 = \frac{5}{60}, \mu_2 = \frac{5}{60}$.

Доведемо, що система (1) є стійкою. Приведемо її характеристичні корені:

Таблиця 1

**ХАРАКТЕРИСТИЧНІ КОРЕНІ СИСТЕМИ ОДНОРІДНИХ
ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ (1)**

Корінь	Значення
β_1	-0,2372
β_2	-0,1876 + 0,0286 I
β_3	-0,1876 - 0,0286 I
β_4	-0,1768
β_5	-0,1546 + 0,0353 I
β_6	-0,1546 - 0,0353 I
β_7	-0,1467
β_8	-0,1402 + 0,0302 I

Корінь	Значення
β_9	$-0,1402 - 0,0302 I$
β_{10}	$-0,1314 + 0,0122 I$
β_{11}	$-0,1314 - 0,0122 I$
β_{12}	$-0,1193 + 0,0453 I$
β_{13}	$-0,1193 - 0,0453 I$
β_{14}	$-0,1053 + 0,0094 I$
β_{15}	$-0,1053 - 0,0094 I$
β_{16}	$-0,0901 + 0,0338 I$
β_{17}	$-0,0901 - 0,0338 I$
β_{18}	$-0,0898 + 0,0256 I$
β_{19}	$-0,0898 - 0,0256 I$
β_{20}	$-0,0917$
β_{21}	$-0,0697$
β_{22}	$-0,0569 + 0,0224 I$
β_{23}	$-0,0569 - 0,0224 I$
β_{24}	$-0,0274$
β_{25}	0

Так як дійсна частина всіх характеристичних коренів є від'ємною, то за теоремою Ляпунова [6, с. 67]: «Лінійна однорідна система із сталими коефіцієнтами стійка по Ляпунову тоді і тільки тоді, коли серед характеристичних чисел матриці коефіцієнтів немає таких дійсних частин, які є додатними, а уявні та нульові характеристичні числа є або простими або мають тільки прості елементарні дільники; лінійна однорідна система із сталими коефіцієнтами асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли всі власні характеристичні числа матриці коефіцієнтів мають від'ємні дійсні частини, можна стверджувати, що система є стійкою». Так, за допомогою пакету Wolfram Mathematica, отримаємо матрицю власних векторів T моделі (1):

0,384	$-0,026 + 0,227i$	$-0,026 - 0,227i$...	0,487	0,857	-0,886
-0,673	$-0,249 - 0,277i$	$-0,249 + 0,277i$...	$-0,157 - 0,127i$	0,064	-0,375
0,469	0,545	0,545	...	$-0,392 + 0,009i$	-0,292	-0,172
-0,149	$-0,303 + 0,077i$	$-0,303 - 0,077i$...	$-0,224 + 0,399i$	-0,305	-0,08
0,108	$0,025 + 0,098i$	$0,024 - 0,098i$...	$-0,024 - 0,035i$	0,01	-0,047
-0,017	$0,006 - 0,027i$	$0,006 + 0,027i$...	$-0,003 - 0,008i$	0,002	-0,006
0,002	$-0,003 + 0,005i$	$-0,003 - 0,005i$...	$0 - 0,002i$	0	-0,001
-0,11	$-0,118 - 0,122i$	$0,0118 + 0,122i$...	$-0,085 - 0,038i$	-0,043	-0,033
0,023	$0,003 + 0,056i$	$0,003 - 0,056i$...	$-0,015 - 0,016i$	-0,006	-0,006
-0,004	$0,006 - 0,013i$	$0,006 + 0,013i$...	$-0,002 - 0,006i$	-0,001	-0,001
0,045	$0,083 + 0,059i$	$0,083 - 0,059i$...	$-0,1741 + 0,036i$	-0,09	-0,024
-0,011	$-0,006 - 0,034i$	$-0,006 + 0,034i$...	$-0,062 - 0,031i$	-0,023	-0,006
0,002	$-0,003 + 0,009i$	$-0,003 - 0,009i$...	$0,01 - 0,036i$	-0,008	-0,002
-0,19	$0,214 - 0,108i$	$0,214 + 0,108i$...	$0,117 - 0,004i$	0,169	-0,156
0,051	-0,122	-0,122	...	0,032	0,033	-0,026
-0,009	$0,03 + 0,006i$	$0,03 - 0,006i$...	0,009	0,006	-0,004
0,216	$-0,277 + 0,004i$	$-0,277 - 0,004i$...	$0,019 - 0,083i$	0,03	-0,074
-0,083	$0,212 + 0,068i$	$0,212 - 0,068i$...	$0,033 - 0,042i$	0,013	-0,022
0,017	$-0,06 - 0,028i$	$0,06 + 0,028i$...	$0,017 - 0,014i$	0,004	-0,005
-0,166	$0,048 + 0,22i$	$0,048 - 0,22i$...	$-0,07 - 0,235i$	-0,092	-0,045
0,075	$-0,079 - 0,188i$	$-0,079 + 0,188i$...	$0,037 - 0,2i$	-0,039	-0,018
-0,016	$0,027 + 0,058i$	$0,027 - 0,058i$...	$0,042 - 0,098i$	-0,013	-0,005
0,058	$0,074 - 0,185i$	$0,074 + 0,185i$...	$0,148 + 0,263i$	-0,148	-0,027
-0,03	$-0,034 + 0,132i$	$-0,034 - 0,132i$...	$0,175 + 0,19i$	-0,093	-0,015
0,007	$0,007 - 0,038i$	$0,007 + 0,038i$...	$0,097 + 0,078i$	-0,035	-0,005

Знайдемо $\vec{y}(0)$ при заданому векторі початкового стану пере-

бування системи: $\vec{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, який показує, що в початковий мо-

мент часу система перебувала в стані простою. Тоді,

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \\ y_5(0) \\ y_6(0) \\ y_7(0) \\ y_8(0) \\ y_9(0) \\ y_{10}(0) \\ y_{11}(0) \\ y_{12}(0) \\ y_{13}(0) \\ y_{14}(0) \\ y_{15}(0) \\ y_{16}(0) \\ y_{17}(0) \\ y_{18}(0) \\ y_{19}(0) \\ y_{20}(0) \\ y_{21}(0) \\ y_{22}(0) \\ y_{23}(0) \\ y_{24}(0) \\ y_{25}(0) \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \vec{P} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,075 \\ 0,065 - 0,02i \\ 0,065 + 0,02i \\ 0,136 \\ 0,065 + 0,067i \\ 0,065 - 0,067i \\ 0,101 \\ 0,009 + 0,104i \\ 0,009 - 0,104i \\ -0,05 - 0,039i \\ -0,05 + 0,039i \\ 0,04 + 0,048i \\ 0,04 - 0,048i \\ -0,124 + 0,025i \\ -0,124 - 0,025i \\ -0,041 + 0,086i \\ -0,041 - 0,086i \\ -0,008 + 0,181i \\ -0,008 - 0,181i \\ -0,154 \\ -0,174 \\ 0,058 + 0,052i \\ 0,058 - 0,052i \\ 0,262 \\ -0,491 \end{pmatrix}$$

А отже,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_2(t)}{dt} \\ \frac{dy_3(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_{24}(t)}{dt} \\ \frac{dy_{25}(t)}{dt} \\ \frac{dy_{26}(t)}{dt} \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_{24}(t) \\ y_{25}(t) \\ y_{26}(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_{24}(t) \\ y_{25}(t) \\ y_{26}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,075e^{-0,2372t} \\ (0,065 - 0,02i)e^{(-0,1876+0,0286i)t} \\ (0,065 + 0,02i)e^{(-0,1876-0,0286i)t} \\ \vdots \\ (0,058 - 0,052i)e^{(-0,0569-0,0224i)t} \\ 0,262e^{-0,0274t} \\ -0,491 \end{pmatrix}$$

Значить,

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ \vdots \\ P_{24}(t) \\ P_{25}(t) \\ P_{26}(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_{24}(t) \\ y_{25}(t) \\ y_{26}(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0,075e^{-0,2372t} \\ (0,065 - 0,02i)e^{(-0,1876+0,0286i)t} \\ (0,065 + 0,02i)e^{(-0,1876-0,0286i)t} \\ \vdots \\ (0,058 - 0,052i)e^{(-0,0569-0,0224i)t} \\ 0,262e^{-0,0274t} \\ -0,491 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,435 + 0,0288e^{-0,237t} + \dots + 0,225e^{-0,0274t} \\ 0,184 - 0,05e^{-0,237t} + \dots + 0,0168e^{-0,0274t} \\ 0,0845 + 0,035e^{-0,237t} + \dots + 0,0765e^{-0,0274t} \\ \vdots \\ 0,0133 + 0,00435e^{-0,237t} + \dots + 0,0388e^{-0,0274t} \\ 0,00737 - 0,00225e^{-0,237t} + \dots + 0,0224e^{-0,0274t} \\ 0,00264 + 0,000525e^{-0,237t} + \dots + 0,00917e^{-0,0274t} \end{pmatrix}$$

Результати розв'язку системи (1) приведені в табл. 2.

Таблиця 2

**ІМОВІРНІСНИЙ ПРОГНОЗ ФУНКЦІОНУВАННЯ ПІДПРИЄМСТВА
НА ФАЗІ ПРИЙОМУ ДВОХ ПОТОКІВ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР
ЗАЛЕЖНО ВІД ЧАСУ t , хв**

Стан	Початковий вектор \vec{P}	$t = 0$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 150$	$t = 200$	$t \rightarrow \infty$
$P_{0,0}$	1	1	0,8143	0,7098	0,6014	0,4933	0,4494	0,4387	0,436	0,4336
$P_{1,0}$	0	0	0,1101	0,1554	0,1831	0,188	0,1853	0,1844	0,1842	0,1842
$P_{2,0}$	0	0	0,0088	0,0222	0,0426	0,0673	0,0797	0,0832	0,0841	0,0841
$P_{3,0}$	0	0	0,0008	0,0026	0,0086	0,0232	0,0343	0,038	0,0389	0,0389
$P_{1,1}$	0	0	0,0041	0,0105	0,019	0,0235	0,0233	0,0231	0,0231	0,0231
$P_{1,2}$	0	0	0,0002	0,0006	0,0018	0,003	0,003	0,003	0,0029	0,0029

Закінчення табл. 2

Стан	Початковий вектор \bar{P}	$t = 0$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 150$	$t = 200$	$t \rightarrow \infty$
P _{1,3}	0	0	0	0	0,0002	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
P _{2,1}	0	0	0,0004	0,002	0,0067	0,0135	0,0155	0,016	0,0162	0,0162
P _{2,2}	0	0	0,0002	0,0004	0,001	0,0024	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029
P _{2,3}	0	0	0	0	0,0001	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
P _{3,1}	0	0	0,0003	0,0004	0,0017	0,0069	0,0104	0,0114	0,0117	0,0117
P _{3,2}	0	0	0	0,0001	0,0003	0,0016	0,0026	0,0028	0,0029	0,0029
P _{3,3}	0	0	0,0001	0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0009	0,001	0,001
Q _{0,1}	0	0	0,0549	0,0775	0,0905	0,0867	0,0794	0,0773	0,0768	0,0768
Q _{0,2}	0	0	0,0022	0,0056	0,0105	0,014	0,0133	0,0129	0,0128	0,0128
Q _{0,3}	0	0	0	0,0002	0,0008	0,002	0,0021	0,002	0,002	0,002
Q _{1,1}	0	0	0,0045	0,0114	0,0228	0,0354	0,0368	0,0365	0,0364	0,0364
Q _{1,2}	0	0	0	0,0008	0,0036	0,0096	0,0109	0,0109	0,0108	0,0108
Q _{1,3}	0	0	0	0,0001	0,0004	0,0019	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
Q _{2,1}	0	0	0,0002	0,0013	0,0046	0,0146	0,0205	0,0217	0,022	0,022
Q _{2,2}	0	0	0	0	0,0008	0,005	0,0081	0,0087	0,0088	0,0088
Q _{2,3}	0	0	0	0	0	0,0011	0,0022	0,0024	0,0024	0,0024
Q _{3,1}	0	0	0,0002	0,0003	0,0009	0,005	0,0107	0,0126	0,0131	0,0131
Q _{3,2}	0	0	0,0002	0,0003	0,0004	0,0022	0,0057	0,007	0,0073	0,0073
Q _{3,3}	0	0	0,0002	0,0002	0,0001	0,0006	0,0018	0,0023	0,0024	0,0024

Як видно з табл. 2, найбільше змінюються в часі імовірності станів $P_{0,0}$ і $Q_{0,1}$, у той час як інші імовірності змінюються незначно і є близькими до нуля. Зміну станів імовірностей $P_{0,0}$ і $Q_{0,1}$ у часі та момент їхнього виходу в стаціонар показано на рис. 2.

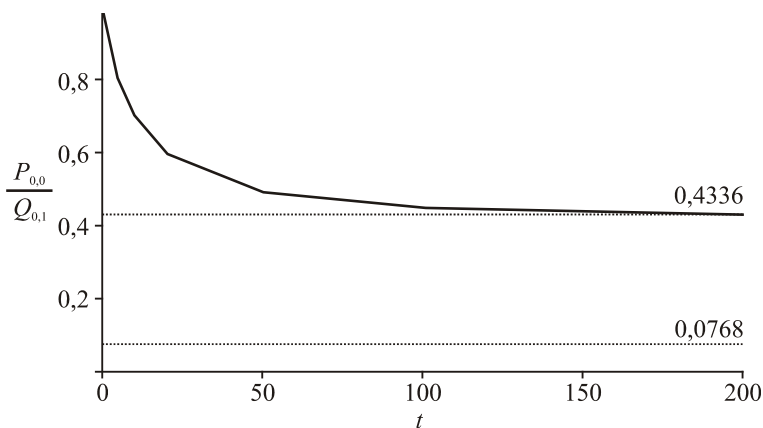


Рис. 2. Зміна станів підприємства $P_{0,0}$ і $Q_{0,1}$ в динаміці

Змінімо значення початкового вектора на $\vec{P}^T = (0,1 \ 0,1 \ 0 \ 0,2 \ 0 \ 0,3 \ 0 \ 0,1 \ 0 \ 0,1 \ 0,1 \ 0 \dots 0)$. Отримаємо таку динаміку змін основних станів підприємства:

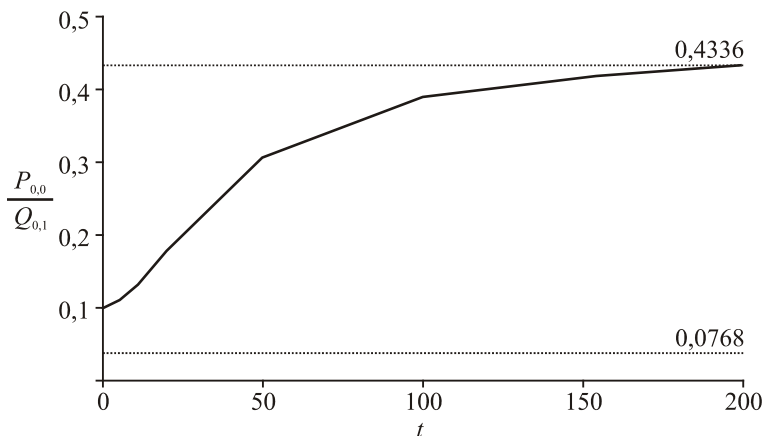


Рис. 3. Зміна станів підприємства $P_{0,0}$ і $Q_{0,1}$ в динаміці при альтернативному початковому векторі

Аналізуючи результати моделювання, що подані в табл. 2 та на рис. 2 та 3 можна стверджувати, що система виходить у стаціонар на двохсотій хвилині функціонування, тобто через 3,33 год., причому при розв'язку системи (1) в динаміці, очевидно, що при

будь-якому заданому значенні вектора \vec{P} початкового стану перебування підприємства імовірності при виході в стаціонар співпадають.

У тому випадку, якщо система буде функціонувати в стаціонарному режимі, тобто незалежно від часу t система (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{0,0} + \mu_1 Q_{0,1} + \mu_2 P_{1,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,0} + \mu_1 Q_{1,1} + \mu_2 P_{2,0} + \lambda_2 P_{0,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,0} + \mu_1 Q_{2,1} + \mu_2 P_{3,0} + \lambda_2 P_{1,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \mu_2)P_{3,0} + \mu_1 Q_{3,1} + \lambda_2 P_{2,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,1} + \lambda_1 P_{1,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,2} + \lambda_1 P_{1,1} = 0 \\
 & -(\lambda_2 + \mu_2)P_{1,3} + \lambda_1 P_{1,2} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,1} + \lambda_2 P_{1,1} + \lambda_1 P_{2,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,2} + \lambda_2 P_{1,2} + \lambda_1 P_{2,1} = 0 \\
 & -(\lambda_2 + \mu_2)P_{2,3} + \lambda_2 P_{1,3} + \lambda_1 P_{2,2} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \mu_2)P_{3,1} + \lambda_2 P_{2,1} + \lambda_1 P_{3,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \mu_2)P_{3,2} + \lambda_2 P_{2,2} + \lambda_1 P_{3,1} = 0 \\
 & -\mu_2 P_{3,3} + \lambda_2 P_{2,3} + \lambda_1 P_{3,2} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{0,1} + \mu_1 Q_{0,2} + \mu_2 P_{1,1} + \lambda_1 P_{0,0} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{0,2} + \mu_1 Q_{0,3} + \mu_2 P_{1,2} + \lambda_1 Q_{0,1} = 0 \\
 & -(\lambda_2 + \mu_1)Q_{0,3} + \mu_2 P_{1,3} + \lambda_1 Q_{0,2} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{1,1} + \mu_1 Q_{1,2} + \mu_2 P_{2,1} + \lambda_2 Q_{0,1} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{1,2}(t) + \mu_1 Q_{1,3} + \mu_2 P_{2,2} + \lambda_2 Q_{0,2} + \lambda_1 Q_{1,1} = 0 \\
 & -(\lambda_2 + \mu_1)Q_{1,3} + \mu_2 P_{2,3} + \lambda_2 Q_{0,3} + \lambda_1 Q_{1,2} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{2,1} + \mu_1 Q_{2,2} + \mu_2 P_{3,1} + \lambda_2 Q_{1,1} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{2,2}(t) + \mu_1 Q_{2,3} + \mu_2 P_{3,2} + \lambda_2 Q_{1,2} + \lambda_1 Q_{2,1} = 0 \\
 & -(\lambda_2 + \mu_1)Q_{2,3} + \mu_2 P_{3,3} + \lambda_2 Q_{1,3} + \lambda_1 Q_{2,2} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \mu_1)Q_{3,1} + \mu_1 Q_{3,1} + \lambda_2 Q_{2,1} = 0 \\
 & -(\lambda_1 + \mu_1)Q_{3,2} + \mu_1 Q_{3,3} + \lambda_1 Q_{3,1} + \lambda_2 Q_{2,2} = 0 \\
 & -\mu_1 Q_{3,3} + \lambda_1 Q_{3,2} + \lambda_2 Q_{2,3} = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Додамо до системи (4) умову нормування $\sum_{n=0}^{n_1} \sum_{m=0}^{m_1} (P_{n,m} + Q_{n,m}) = 1$.

Виразимо, з умови нормування системи (4) $P_{0,0}$ і підставимо його у перше рівняння (2). Отримаємо:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - P_{0,1} - P_{0,2} - P_{0,3} \dots - Q_{3,1} - Q_{3,2} - Q_{33}) + \mu_1 Q_{0,1} + \mu_2 P_{1,0} = 0$$

Так, як ліва частина системи (4) дорівнює нулю, то перше рівняння набуде вигляду:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(P_{0,1} + P_{0,2} + P_{0,3} \dots + Q_{3,1} + Q_{3,2} + Q_{33}) + \mu_1 Q_{0,1} + \mu_2 P_{1,0} = (\lambda_1 + \lambda_2)$$

Тоді, система (4) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda_1 + \lambda_2)(P_{0,1} + P_{0,2} + P_{0,3} \dots + Q_{3,1} + Q_{3,2} + Q_{33}) + \mu_1 Q_{0,1} + \mu_2 P_{1,0} = 1 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,0} + \mu_1 Q_{1,1} + \mu_2 P_{2,0} + \lambda_2 P_{0,0} = 0 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{2,0} + \mu_1 Q_{2,1} + \mu_2 P_{3,0} + \lambda_2 P_{1,0} = 0 \quad (5) \\ \vdots \\ -(\lambda_1 + \mu_1)Q_{3,1} + \mu_1 Q_{3,1} + \lambda_2 Q_{2,1} = 0 \\ -(\lambda_1 + \mu_1)Q_{3,2} + \mu_1 Q_{3,3} + \lambda_1 Q_{3,1} + \lambda_2 Q_{2,2} = 0 \\ -\mu_1 Q_{3,3} + \lambda_1 Q_{3,2} + \lambda_2 Q_{2,3} = 0 \end{array} \right.$$

Отримаємо систему вигляду $A \cdot \vec{P} = \vec{B}$, де \vec{B} — вектор вільних членів вигляду

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ матриця } A \text{ має вигляд коефіцієнтів при невідомих}$$

системи (5), тобто у першому рядку використано умову нормування.

Звідси, розв'язок системи (5) буде: $\vec{P} = A^{-1}\vec{B}$. Отримаємо:

Таблиця 3

**ІМОВІРНІСНИЙ ПРОГНОЗ ФУНКЦІОНУВАННЯ ПІДПРИЄМСТВА
НА ФАЗІ ПРИЙОМУ ДВОХ ПОТОКІВ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР
У СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ РОБОТИ.**

Стан	Ймовірність	Стан	Ймовірність	Стан	Ймовірність	Стан	Ймовірність	Стан	Ймовірність
$P_{0,0}$	0,4336	$P_{1,2}$	0,0029	$P_{3,1}$	0,012	$Q_{0,3}$	0,0021	$Q_{2,2}$	0,0089
$P_{1,0}$	0,1837	$P_{1,3}$	0,0004	$P_{3,2}$	0,0029	$Q_{1,1}$	0,0362	$Q_{2,3}$	0,0026
$P_{2,0}$	0,0843	$P_{2,1}$	0,0163	$P_{3,3}$	0,0008	$Q_{1,2}$	0,011	$Q_{3,1}$	0,0134
$P_{3,0}$	0,0393	$P_{2,2}$	0,0028	$Q_{0,1}$	0,0765	$Q_{1,3}$	0,0025	$Q_{3,2}$	0,0073
$P_{1,1}$	0,023	$P_{2,3}$	0,0005	$Q_{0,2}$	0,0127	$Q_{2,1}$	0,0221	$Q_{3,3}$	0,0025

А отже, розв'язки системи (1) в динаміці при виході системи в стаціонар збігаються з розв'язками системи (4).

Пірахуємо математичні сподівання:

$$M_1 = \sum_{m=0}^3 mP_{n,m} + \sum_{m=0}^3 mQ_{n,m} = 1,601 \text{ у.о.}$$

$$M_2 = \sum_{n=0}^3 nP_{n,m} + \sum_{n=0}^3 nQ_{n,m} = 2,0323 \text{ у.о.}$$

Використовуючи загальновідому формулу Літтла легко підрахувати час, за який відбувся прийом зернових і час перебування партій зернових культур у черзі.

Оскільки $t = \frac{M}{\lambda}$, то :

$t_1 = \frac{1,601}{0,0167} = 96,06 \text{ хв.}$ — середній час перебування зернових першого потоку в системі;

$t_2 = \frac{2,0323}{0,0333} = 69,69 \text{ хв.}$ — середній час перебування зернових другого потоку в системі.

Оскільки $L_q = M - \rho$ [1, с.138] — середня кількість вимог, що перебувають в черзі в системі, то за відомою формулою Літтла

$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ — середній час перебування вимог у черзі.

Тоді, кількість зернових першого потоку, що перебувають в черзі — $L_{q1} = M_1 - \rho_1 = 1,601 - 0,2 = 1,401$ у.о. Час перебування в че-

рзі становить $W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda_1} = 84,06$ хв.

Кількість зернових другого потоку, що перебувають у черзі, — $L_{q2} = M_2 - \rho_2 = 2,0323 - 0,4 = 1,6323$ у.о. Час перебування в черзі

становить $W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} = 48,97$ хв.

Виходячи з приведених даних, легко побудувати прогноз функціонування зернопереробного підприємства за добу. Так, за одну добу (8 робочих годин) підприємство обробить на фазі прийому зернових 8 у.о. або $8 \cdot 1 = 8$ т зернових першого потоку та 14 у.о. або $14 \cdot 2 = 28$ т зернових другого потоку. При цьому очікувати на приймання внаслідок обмеженості потужностей підприємства зернові першого потоку будуть 7,8 год., а зернові другого потоку 6,8 год.

Висновки. На підґрунті прийнятого концептуального положення щодо доцільності та ефективності використання СМО для моделювання діяльності зернопереробного підприємства, запропонована математична модель (ММ) функціонування елеватора на фазі прийому зернових культур.

Отримані в праці вирази для залежних змінних ММ дозволяють отримати ймовірності перебування підприємства в тому чи іншому стані роботи. Оскільки оцінки ймовірностей залежать від часу t , то можна говорити про опис діяльності підприємства в динаміці. Також доведено, що незалежно від стану початкового вектора \vec{P} підприємство входить у стаціонарний режим роботи з однією і тією ж імовірністю, за один і той же час.

Наведена модель управління зернопереробним підприємством дозволяє прогнозувати поведінку підприємства на фазі прийому зернових, визначити основні обсяги надходження зерна, а отже і прибутку від здійснення даної операції за відповідний час. Також легко визначити час перебування партій зернових у черзі, що в свою чергу дозволяє прогнозувати виникнення штрафів за простої автомобілів і відповідно їх скорегувати. Причому використання даної моделі є досить гнучким, так як дозволяє налаштуватися на будь-яку фазу обслуговування (прийом, відпуск, очищення, сушіння та ін.), корегуючи відповідно параметри λ та μ , і отримати прогноз діяльності підприємства як у динаміці, так і в стаціонарному режимі.

Література

1. *Жлуктенко В. І., Бегун А. В.* Стохастичні моделі в економіці: Монографія.—К.: КНЕУ, 2005.—352 с.
2. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания: Перевод с англ. / Пер. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
3. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М.: Советское радио; 1965. — 510 с.
4. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем — искусство и наука. — М.: Мир, 1978. — 418 с.
5. *Пунков С. П., Стародубцева А. И.* Элеваторно-складская промышленность. — М.: Колос, 1980. — 256 с.
6. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

Стаття надійшла до редакції 30.04.2013 р.